CONSTRUCCIONES MENTALES PARA EL OBJETO RECTA DE EULER

Violeta Chávez Aninat y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
va.chavezem@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen. En esta investigación se presenta un estudio en torno a la *Recta de Euler*, lugar geométrico que se construye en un triángulo y que contiene a tres elementos notables de él: Baricentro, Circuncentro y Ortocentro.

Con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), marco teórico de carácter cognitivo enmarcado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, se realiza un estudio en profundidad de la construcción cognitiva de los conceptos geométricos involucrados en el aprendizaje (re-construcción) de la recta de Euler. Para llevar a cabo esta investigación se han propuestos los siguientes objetivos: (1) Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario, (2) Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler y (3) Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.

Palabras clave: triángulo, recta de Euler, teoría APOE

Abstract. This research presents a study about the Euler line, geometric place which is built in a triangle containing three notable items of it: Centroid, Circumcenter and Orthocenter.

Based on APOS theory (Actions, Processes, Objects and Schemes), a cognitive framework framed in the field of mathematics education, a deep study of the cognitive construction of geometric concepts involved in learning (re-construction) of the Euler line. To carry out this research the following objectives have been proposed: (1) to show empirical evidence of learning related to the lines and special points of a triangle at high school and university level, (2) to document the mental constructs that pedagogy students and/or undergraduate students may explain when working with points and notable lines for the construction of the Euler line, and (3) to propose activities to develop the construction of the Euler line and the proof of the theorem associated to this geometric object of high school.

Key words: triangle, Euler line, APOS theory

Introducción

La investigación aquí expuesta desarrolla su estudio en geometría, específicamente en elementos del triángulo –y sus propiedades– que permiten construir la Recta de Euler, y tener de ésta una concepción de objeto matemático. Este trabajo se realiza desde la mirada de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991), marco teórico de carácter cognitivo, que exige documentar las estructuras y mecanismos mentales que son requeridas para esta construcción.

Los antecedentes indican que los conceptos de Altura, Bisectriz, Transversal de Gravedad y Simetral de un triángulo, no son fácilmente distinguidos por los estudiantes, los confunden, los olvidan y carecen para ellos de un significado relevante. En la Figura 1, se muestra como un estudiante de primer año de pedagogía en matemática confunde el concepto transversal de gravedad con el de bisectriz, y en la Figura 2, como otro estudiante etiqueta como transversal de gravedad al elemento simetral.

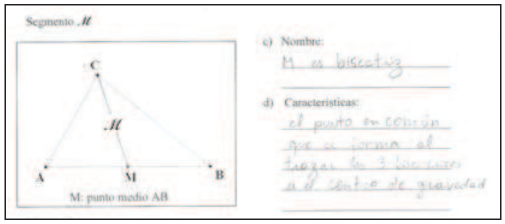

Figura 1: Respuesta 1.2 del cuestionario exploratorio del Estudiante 2.

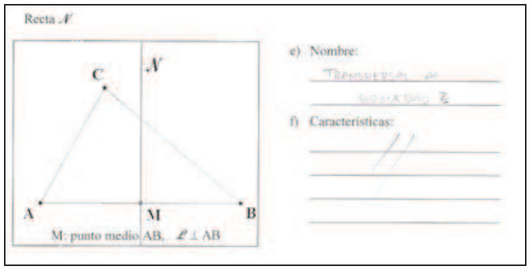

Figura 2: Respuesta 1.3 del cuestionario exploratorio del Estudiante 5.

En el programa de 7° Básico, que se utiliza desde el año 2011 a la fecha, se expone que la unidad de geometría en este nivel ofrece a los estudiantes la posibilidad de "resolver desafíos que estimulen el pensamiento y la imaginación, a través de las construcciones geométricas con regla y compás o un procesador geométrico, y la posibilidad de desarrollar la deducción, base de estas construcciones" (MINEDUC, 2011. p. 49), pero las actividades propuestas no conllevan a desafíos, no propician análisis, ni dan relevancia a los axiomas y propiedades que permiten el desarrollo de las construcciones propuestas. Esto se puede apreciar en las actividades sugeridas en el programa, expuestas en la Figura 3, donde se establece que es el docente quien "*da*" las propiedades al estudiante, y el estudiante solo debe verificar esas propiedades utilizando instrumentos geométricos.

> El docente da a los alumnos las propiedades de las transversales de gravedad de triángulos y les pide, que utilizando regla y compás las verifiquen. Por ejemplo, les dice que las bisectrices de un triángulo se cortan en la razón 2 es a 1. Los estudiantes verifican esa propiedad, usando regla y compás.

Figura 3: Extracto de los "Ejemplos de actividades" propuestos en el Programa de Estudio: Matemática Séptimo año Básico, (MINEDUC, 2011. p. 53).

El estudio de las rectas y puntos notables de triángulos se desarrolla con poca profundidad, trivializando aspectos geométricos que son base para desarrollar una geometría axiomática.

El currículum chileno –Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009– no establece actividades donde se profundice el estudio de las rectas y puntos notables, por lo que el aprendizaje de estos elementos queda estancado en enseñanza básica.

La demostración de que: "El Circuncentro, el Baricentro y el Ortocentro de un triángulo son colineales, y la distancia del Baricentro al Ortocentro es igual a dos veces la distancia del Baricentro al Circuncentro" (Duran, 2005), puede ser desarrollada en el ámbito de la geometría Euclidiana y también con geometría analítica, tal cual lo hiciera Leonhard Euler en 1767, tanto en educación superior como a nivel escolar, si se proporcionarán las herramientas adecuadas.

Citando a J. Bruner, Moisés Guilar indica que "un currículo se basa en pasos sucesivos por un mismo dominio de conocimiento y tiene el objetivo de promover el aprendizaje de la estructura subyacente de forma cada vez más poderosa y razonada; este concepto se ha dado en llamar currículo en espiral" (Guillar, 2009, p. 237).

Basándonos en esta idea de curriculum en espiral, es que enfatizamos el hecho de que un contenido puede ser conocido por un estudiante, al aprenderlo en un nivel específico, pero para su comprensión profunda lo ideal sería que hubiese otras instancias donde el contenido sea retomado y profundizado.

Hipótesis de investigación

Construir cognitivamente la Recta de Euler, durante la enseñanza media, propiciará un aprendizaje más profundos de los puntos y rectas notables de un triángulo, pues este concepto involucra un proceso analítico–deductivo, que al ser alcanzado implica haber interiorizado las nociones de circuncentro, baricentro y ortocentro, y por ende las de simetrales, tranversales de gravedad y alturas de un triángulo.

Marco teórico

La investigación se trabaja a la luz de un Marco Teórico (MT) de carácter cognitivo, pues este tipo de marco centra su mirada es el estudio de los procesos de aprendizajes intelectuales y matemáticos que realiza un estudiante, lo que sin duda corresponde al interés del estudio aquí expuesto. Específicamente se trabaja con la Teoría APOE, creada por Ed Dubinsky en 1991, basada en la epistemología genética de Piaget. Este MT propone un modelo que permite de manera viable, presentar de forma explícita las construcciones mentales que los estudiantes requieren, para que un determinado concepto sea comprendido y encapsulado en un objeto.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: Acción, Proceso y Objeto. Al tener una concepción de Acción, el estudiante trabaja el Objeto como algo que no le es propio, pero que debe desarrollarse y puede hacerse con la ayuda de instrucciones externas definidas de forma clara, el Objeto aun no toma sentido para quien lo intenta usar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso (Dubinsky, 1996), en esta etapa la manipulación del concepto va de la mano con un razonamiento, y es llevada a cabo de forma autónoma. Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado Proceso y piensa en el Proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal Proceso como un Objeto cognitivo. No obstante, "en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo" (Dubisnky, 1991, p. 97). Se debe señalar que estas etapas no necesariamente son secuenciales, se puede tener concepción de Acción para ciertos aspectos de un determinado concepto, y tener una concepción proceso e incluso objeto para otras, lo esencial es que el estudiante evolucione de un estado de construcción de menor conocimiento a otro mayor, por medio de la abstracción reflexiva. La teoría APOE permite dar aportes al desarrollo curricular en el área matemática, por la forma en que se complementan sus tres componentes: análisis teórico, tratamiento instruccional y datos empíricos (Mena, 2011).

Desde la mirada de APOE se plantea la siguiente pregunta que guía la investigación: ¿Qué construcciones y mecanismos mentales se requieren desarrollar para la construcción de la Recta de Euler, como objeto?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se proponen los siguientes objetivos:

1. Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes relacionados con las rectas y puntos notables de un triángulo a nivel escolar y universitario.
2. Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y/o licenciatura en matemática al trabajar los puntos y rectas notables para la construcción de la recta de Euler.
3. Proponer actividades para desarrollar la construcción de la Recta de Euler y la demostración del teorema asociado a este objeto geométrico en enseñanza media.

Metodología de investigación

La teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación que ha sido validado e implementado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Este ciclo consta de 3 etapas: (1) Análisis teórico del concepto o Descomposición Genética (DG), (2) Diseño y aplicación de cuestionarios y entrevistas, y (3) Análisis y verificación de datos.

Basándonos en el ciclo de investigación que propone esta teoría (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews, Thomas, 1996), hemos realizado un análisis teórico plasmado en una DG, (Figura 4) que consiste en la explicitación de las estructuras y mecanismos mentales asociadas a la (re)construcción de esta recta, que debe mostrar un estudiante universitario para llegar al corazón de este objeto matemático –sus elementos y propiedades– y así poder desarrollar la demostración del teorema asociado a ella.

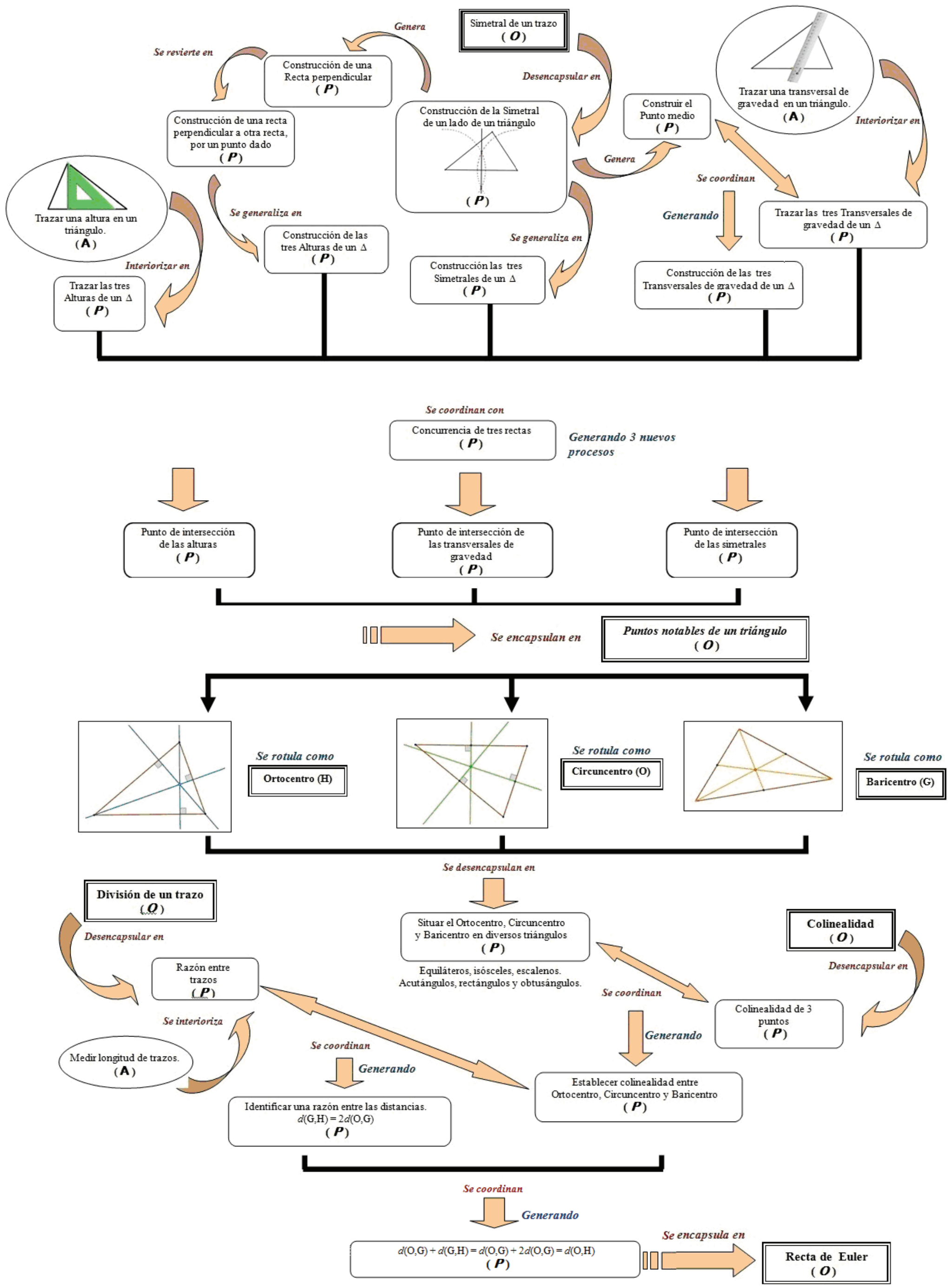

Figura 4: Modelo de aproximación al Objeto Recta de Euler.

Para documentar la DG propuesta, se diseña un cuestionario que da cuenta del trabajo realizado por los informantes al enfrentarse a diversas actividades y preguntas relacionadas con el contenido “elementos lineales del triángulo”, el cual dejará en evidencia el cómo éstos individuos han construido la noción de puntos notables, cuáles de sus elementos dominan y qué camino utilizan al momento de desarrollar la construcción cognitiva del concepto Recta De Euler.

A modo de ejemplo se presentan una tarea del cuestionario, su descripción en base a la DG y se explicitan las concepciones de las que da cuenta un estudiante con su desarrollo y explicación

Parte 2.1 (del cuestionario)

En un triángulo *ABC*, se genera un punto P_1 al interceptar las simetrales s_a y s_b, y un punto P_2 al interceptar las simetrales s_b y s_c. ¿Es posible afirmar que estos dos puntos son distintos? Justifica tu respuesta.

Dado que nuestra finalidad es documentar la Descomposición Genética Teórica que se ha diseñado, y dar indicios de que el camino de construcción propuesto en ella es viable, basta que nos concentremos en la evidencia entregada por un grupo particular de informantes, que llamaremos caso, para una indagación en profundidad, ya que según Stake, “El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1998, p. 11).

A continuación se hace referencia al Caso1: Estudiantes titulados de la carrera de licenciatura en matemática, destacados en los ramos de geometría.

La Figura 5 evidencia cómo el estudiantes 1 muestra tener una concepción objeto de los puntos *O*, *G* y *H*, los estudiantes 1 y 3 sitúan el Circuncentro, Baricentro y Ortocentro en el triángulo construyendo solo 2 Simetrales, Transversales de Gravedad y Alturas, respectivamente, lo que da cuenta que de dicho proceso ha sido encapsulado.

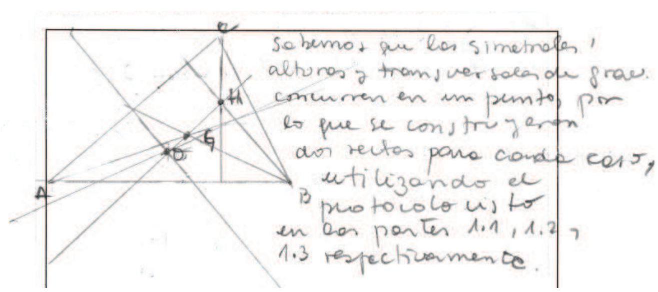

Figura 5: Respuesta estudiante 1, Actividad 3 del cuestionario que documenta la DG.

Las evidencias recolectadas permiten dejar de manifiesto elementos que no habían sido considerando al inicio de la investigación, como el caso del la inexistencia de una única recta que cumpla con las condiciones definidas por Euler en un triángulo equilátero, lo que se analizó debido a la respuesta del estudiante 1 (Figura 6), quien afirma que la razón entre trazos no sería valida en el triángulo equilátero, sin considerar el hecho de que 3 puntos coincidentes mantienen la relación pues la distancia entre ellos es cero.

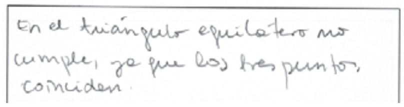

Figura 6: Respuesta estudiante 1, Actividad 3.2 b)

Algunas actividades propuestas

En 8° básico: Construcción de simetrales, alturas, bisectrices y transversales de gravedad con regla y compás. Caracterizar las rectas notables de un triángulo. Resolver situaciones que involucren los conceptos de rectas notables.

En 1° Medio: Determinar la concurrencia de las rectas notables. Argumentar sobre la concurrencia de las tres simetrales y las tres bisectrices con la noción de lugar geométrico. Caracterizar los puntos notables de un triángulo. Resolver situaciones que involucren los conceptos de puntos notables.

En 2° Medio: Situar los 4 puntos notables en diversos triángulos. Determinar la colinealidad del ortocentro, baricentro y circuncentro. Argumentar sobre la colinealidad de tres puntos notables. Establecer una relación métrica entre las distancias del circuncentro al baricentro y de baricentro al ortocentro. Caracterizar la Recta de Euler.

Conclusiones

El análisis teórico documentado en la DG, arrojó varios elementos que se estiman necesarios, para comprender e interiorizar los conceptos geométricos: Altura, Simetral, Transversal de gravedad, Circuncentro, Baricentro, Ortocentro y Recta de Euler. Los resultados de esta investigación dan cuenta de la viabilidad de la ruta propuesta, es decir, un estudiante que ha construido la recta de Euler por medio de las construcciones y mecanismos mentales expuesto, ha incorporado a sus conocimientos las nociones de puntos y rectas notables.

Una actividad que permita deducir la existencia de una recta que pase por el circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo cualquiera, permite el desarrollo de una geometría, que se bien se desliga de lo concreto, involucra una riqueza conceptual, analítica y procedimental, que hasta la fecha ha siendo ignorada en las actividades propuestas en textos escolares. La ruta expuesta permite proponer actividades que llevan a la construcción cognitiva del Objeto de estudio en enseñanza media, pues todos sus componente teóricos están enmarcados dentro de los CMO propuestos por el MINEDUC (2009), por lo que podemos concluir que efectivamente la teoría APOE proporciona las herramientas necesarias para dar una mirada al curriculum y replantear algunas de sus componentes.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, Schoenfeld, Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education,* .2. Providence, RI: American Mathematical Society, 1-32.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 25 – 41.

Duran, D. (2005). El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. *Divulgaciones Matemáticas*, *13*(1), 73-76.

Guillar, M. (2009). *Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural"*. Educere, *13*(44), 235-241.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos*. Tesis para obtener el grado de Doctorado en Matemática Educativa (no publicada), Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

MINEDUC. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009*. Santiago, Chile.

MINEDUC. (2011). *Matemática Programa de Estudio Séptimo Año Básico*. Santiago, Chile.

Stake, R. (1998). *Investigación com estúdio de casos.* Madrid: Morata.